قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

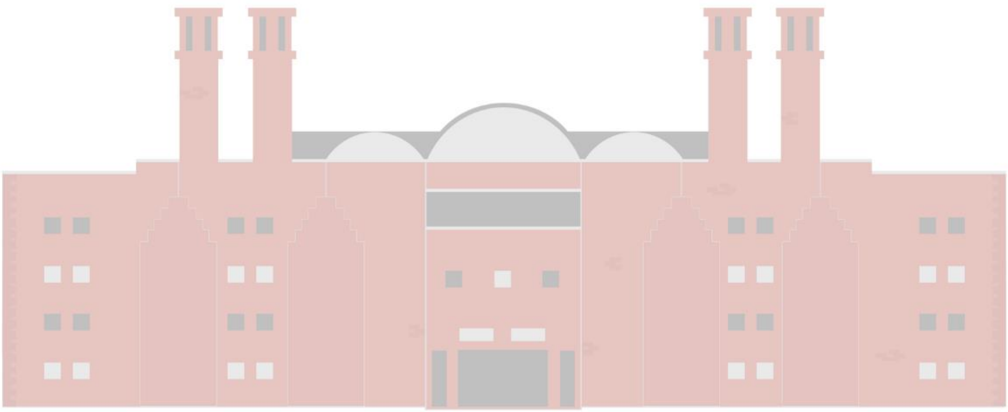
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل العددي

المحاضرة الثانية

8 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/١٤

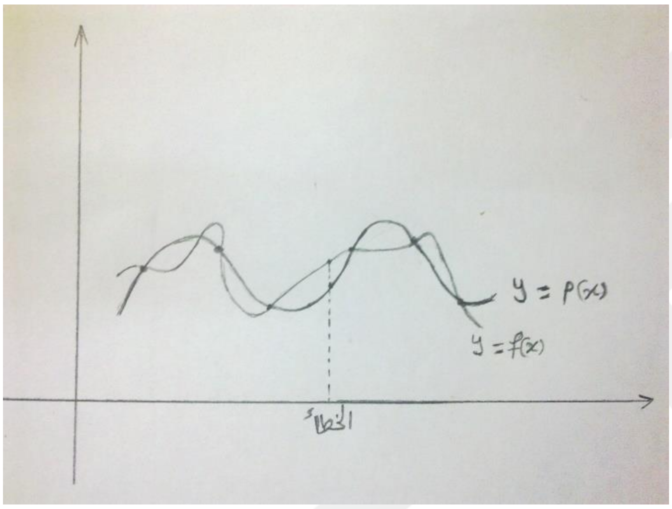
طريقة الاستيفاء لكثيرات الحدود :

ولتكن لدينا $n+1$ نقطة وهي عبارة عن مجموعة النقاط التالية $\{x_k, y_k\}_{k=0}^{k}$

ولدينا أن هذه النقاط يمر بها التابع $y = f(x)$
$$\begin{cases} y_i = f(x_i) \\ i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

وليس لدينا أي معلومات اخرى عن هذا التابع $f(x) = ?$

سنفرض تابع $p(x)$ بدلاً عن $f(x)$ لكن لا يتطابقان معه
$$\begin{cases} y_i = f(x_i) = p(x_i) \\ i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$



الاستيفاء بكثيرات الحدود

يقصد أن $p(x)$ هو كثير الحدود
$$\begin{cases} p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \\ \dots\dots\dots + a_1 x + a_0 \\ a_n, a_{n-1}, \dots\dots\dots, a_1, a_0 \end{cases}$$

ملاحظة : عندما يكون لدينا $n+1$ نقطة

يمكننا التعامل مع كثيرات حدود من الدرجة $n = n-1$

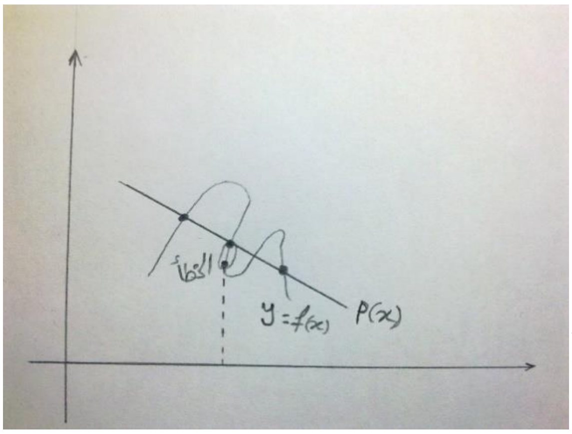
طريقة لاغرانج :

$$p_n(x), \qquad y = f(x), \qquad n+1\ .\{x_k, y_k\}_{k=0}^{k}$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x_i) = p_n(x_i) \\ i = 0,1,2,3, \dots, n \end{cases}$$

حالة نقطتين :

ان كثير حدود لاغرانش من الدرجة الأولى هو :



$$\boldsymbol{P_2(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

$$P_1(x_0) = y_0 \ * 1 + y_1 \ * 0 = y = f(x_0)$$

$$P_2(x_1) = y_0 \ * 0 + y_1 \ * 1 += y_1 \ = f(x_1)$$

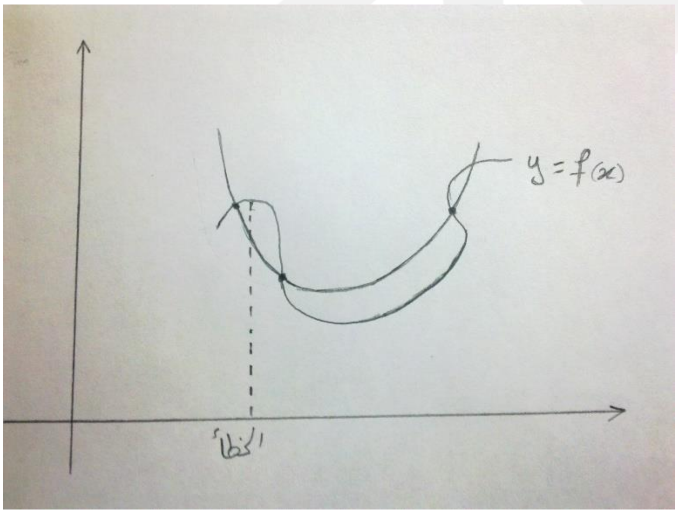
وهكذا يكون قد استوفى الشرط الثاني

$$\boldsymbol{P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k \ L_{1,k}(x)}$$

$$\boldsymbol{L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}$$

$$\boldsymbol{L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

حالة ثلاث نقاط :



$$y_0 = f(x_3) = p_2(x_2)$$

$$y_1 = f(x_1) = p_2(x_1)$$

$$y_2 = f(x_2) = p_2(x_2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P_2(x_i) = f(x_i)} \\ \mathbf{i = 0, 1.2} \end{cases}$$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k \ L_{2,k}(x)$$

$$P_2(x) = y_0 \ L_{2,0}(x) + y_1 \ L_{2,1}(x) + y_2 \ L_{2,2}(x)$$

$$sL_{2,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\mathbf{P_2\,(x) = y_0\,\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\,\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\,\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$$

يهمنا الأن أن نتثبت أن الشرط محقق وهل كثير الحدود يمر من جميع النقاط؟

سوف نعوض النقطة x_0 بدلا من x

$$P_1\,(x_0) = y_0\,.1 + y_1\,.0 + y_2\,.0 = y_0\ \ = f(x_0)$$

$$P_2\,(x_1) = y_0\,.0 + y_1\,.1 + y_2\,.0 = y_1\ \ = f(x_1)$$

$$P_3\,(x_2) = y_0\,.0 + y_1\,.0 + y_2\,.1 = y_2\ \ = f(x_2)$$

تعريف للتابع $f\,(x)$ عند t : $\quad \mathrm{f}(\mathbf{x = t}) \ \approx \mathbf{P_2\,(x = t)}$

ملاحظة : إن أعظم درجة لكثير الحدود هي عدد النقاط -١

٣- حالة أربع نقاط :

$$\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_i = f(x_i) = p_3(x_i)} \\ \boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3} \end{cases}$$

$\boldsymbol{P_3(x)}$?

شرط الاستيفاء $y_i = f(x_i) = P_3(x_i)$

$i = 0,1,2,3$

$$\boldsymbol{P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k \; L_{3,k}(x)}$$

$$\boldsymbol{= y_0 \; L_{3,0}(x) + y_1 \; L_{3,1}(x) + y_2 \; L_{3,2}(x) + y_3 \; L_{3,3}(x)}$$

$$\boldsymbol{L_{3,0}(x)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

.

.

.

$$\boldsymbol{L_{3,3}(x)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

الشرط محقق وهو عبارة عن مرور كثير حدود أربع نقاط من التابع .

$$P_3(x_0) = y_0 \; * 1 + y_1 \; .0 \; + \; y_2 .0 \; = y_0 \; = f(x_0)$$

.

.

.

.

$$P_3(x_3) = y_0 \; .0 + y_1 \; .0 + y_2 \; .0 + y_3 \; .1 = y_3 \; = f(x_3)$$

قاعدة :

$$\mathbf{L_{3,k}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = k \\ 0 & \text{if} \quad i \neq k \end{cases}}$$

٤-الحالة العامة:

نقطة $n+1$ $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{k}$

$$y = f(x)$$

$$p_n(x)?$$

$$\begin{cases} y_i = f(x_i) = p_n(x_i) \\ i = 0, 1, \dots \dots . . n \end{cases}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_0 L_{N,K}(x)$$

$$L_{n,0}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots . . (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots . . (x_0 - x_n)}$$

$$L_{n,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots . . (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots . . (x_1 - x_n)}$$

$$L_{n,n} = \frac{(x - x_0) \dots \dots \dots \dots . (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \dots \dots \dots \dots . (x_n - x_{n-1})}$$

$$\begin{cases} L_{n,k} = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ k = 0, 1, 2, \dots \dots . . n \end{cases}$$

$$L_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 1 & : if \;\; k = j \\ 0 & : if \;\; k \neq j \end{cases}$$

$$p_n(x_n) = y_0 \times 1 + y_1 \times 0 + y_2 \times \dots \dots y_n \times 0 = y_0 = f(x_0)$$

$$p_n(x_n) = y_n = f(x_n)$$

- **مثال:** إيجاد كثير الحدود لاغرانج من الدرجة الثانية.

x_i	$x_0=2$	$x_1=2,75$	$x_2=4$
$F(x_i)$	$y_0=1/2$	$y_1=4/11$	$y_2=1/4$

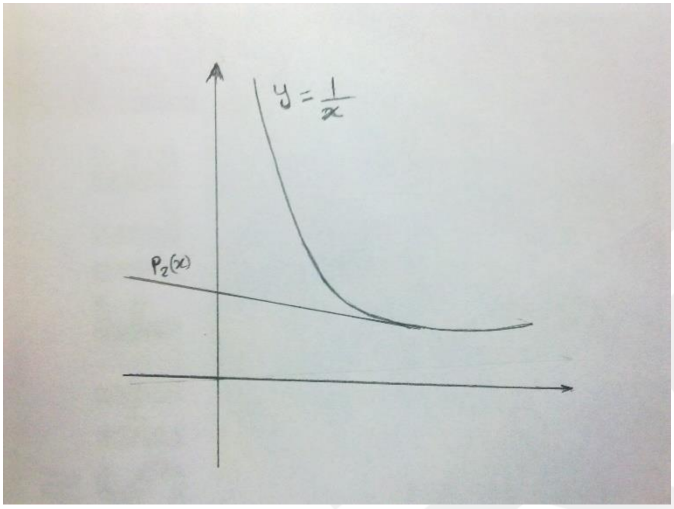
$$p_n(x)=\frac{1}{2}L_{2,0}(x)+\frac{4}{11}L_{2,1}(x)+\frac{1}{4}L_{2,2}(x)$$

$$L_{2,0}(x)=\frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)}$$

$$L_{2,1}(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)}$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)}$$

$$p_2(x)=\frac{1}{22}x^2-\frac{35}{88}x+\frac{49}{44}$$



- إذا تم طلب إيجاد الدالة عند نقطة اخرى مثلاً x=3 نقوم بمايلي:

$$p(x=3)\approx p_2(3)=0.32955$$

فسنجد أن القيمة قريبة جداً عندما نعوض النقطة في التابع الأصلي

$$p(x)=\frac{1}{3} \qquad ,p(3)=0.333$$

- **حساب كثير الحدود عند نقطة معينة $p_n(x=T)=?$ (بطريقة برمجية).**

$$data\begin{cases}x_0,x_1,x_2,\dots x_n\\ y_0,y_1,y_2,\dots y_n\end{cases}$$

$$s:=0\;\{=p_n(T)\}$$

$$\begin{cases} for\ k = 0 \ldots\ldots n \\ term := 1 \\ \begin{cases} for\ j = 0 \ldots n \\ if\ k \neq j\ , them \\ term := term * (T - x_j)/(x_k - x_j) \\ end\ for\ j \end{cases} \\ s := s + y_k * term \\ end\ for\ k \\ print\ "s=";s \end{cases}$$

- **طريقة هورنر في حساب قيمة كثير الحدود.**

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$x^2 = x \times x$$

$$x^3 = x \times x \times x = x \times x^2$$

$$x^n = x \times x \times x \times \ldots\ldots = x \times x_{n-1}$$

حالة العامة:

$$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots\ldots + a_1x + a_0$$

x=t	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
		$b_n.t$	b		$b_2.t$	$b_1.t$
$\sum$	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	.....	b_1	$b_0 = p_n(x = t)$

حيث$(b_n = a_n)$

نضع في جدول ثم نضرب b_n ب t و نضع الناتج$b_n.t$ في السطر التاني بالعامود الثاني ثم نجمع $b_n.t$ مع a_{n-1} ونضع ناتجه في السطر الثالث في العامود الثاني وهو b_{n-1} ثم نضربb_{n-1} ب t ونضع الناتج في السطر الثاني في العامود الثالث ونجمعه مع a_{n-2} و نضع الجواب في السطر الثالث ثم نكرر العملية على نفس الطريقة واخر حد هو الجواب النهائي لحل هذا التابع b_0.

- **مثال:** $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$

$x = -1$

احسب $p(x)$?

الحل: نتبع طريقة الجدول

-4	3	-2	0	1	$x = -1$
-4	+1	+1	-1		
-8	4	-1	-1	1	$\sum$

$p(x = -1) = -8$

ما ينشده الشخص السامي يجده في نفسه وما ينشده العامي يجده في الاخرين.

Fn mknon